MATEMÁTICA DISCRETA II

PRIMER CONTROL (SOLUCIONES)

Ejercicio 1 (10 ptos.)

Indica razonadamente si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

A) Sea la sucesión d = [4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3].

A1) Existe un grafo simple y conexo *G* cuya sucesión de grados es d.

A2) d es la sucesión de grados de un grafo bipartido.

A3) d es la sucesión de grados de un árbol.

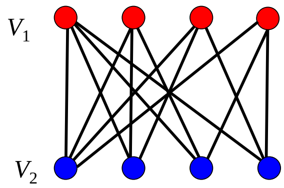
B) Si T es un árbol, entonces T es un grafo bipartido.

C) Si *G* es un grafo simple y regular de grado par entonces *G* no tiene aristas puente.

Solución

A) A1) Existe un grafo simple y conexo *G* cuya sucesión de grados es d = [4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3]

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
b	a	a	a	a	b	b	b
c	f	d	c	c	g	f	f
d	g	e	e	d	h	h	g
e	h						



A2) Puede ser bipartido, haciendo $V = V_1 \cup V_2$, V_1 = [4, 3, 3, 3], V_2 = [4, 3, 3, 3].

A3) No puede ser un árbol porque no tiene vértices de grado 1.

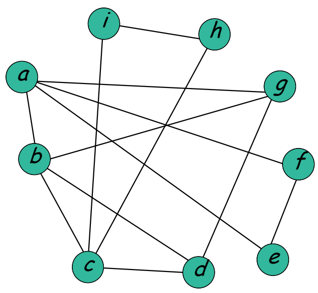
B) $V = V_1 \cup V_2$, V_1 = {vértices de V en nivel par}, V_2 = {vértices de V en nivel impar}

C) Si *G* es un grafo simple y regular de grado par, supongamos que tiene una arista puente, entonces al suprimirla, habría dos componentes conexas del grafo con un único vértice de grado impar cada una, lo que es una contradicción, ya que cada componente conexa tiene un número par de vértices de grado impar.

Ejercicio 2 (10 ptos.)

A) Halla las aristas del árbol cuyo código de Prüfer es *C* = [2, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 5]. ¿Es único?

B) Utilizando el algoritmo BEP, con raíz en el vértice **a** y eligiendo los vértices por orden alfabético, halla los vértices corte del siguiente grafo, indicando el doble etiquetado de los vértices y la condición sobre las etiquetas que los caracteriza.



Solución

A) *A* = [24, 36, 13, 17, 18, 21, 29, 52, 5-10] es único para el código dado.

B) **BEP:** A = [ab, bc, cd, dg, ch, hi, ae, ef]
P = [a], P = [a, b], P = [a, b, c], P = [a, b, c, d], P = [a, b, c, d, g], P = [a, b, c, d], P = [a, b, c],
P = [a, b, c, h], P = [a, b, c, h, i], P = [a, b, c, h], P = [a, b, c], P = [a, b], P = [a], P = [a, e], P = [a, e, f].

Vértices	**Etiquetas de los vértices**	**Aristas de retroceso**
a	[1, 1]	
b	[2, 1]	
c	[3, 1]	
d	[4, 1]	db
e	[8, 1]	ea
f	[9, 1]	
g	[5, 1]	ga, gb
h	[6, 3]	
i	[7, 3]	ic

a es vértice – corte puesto que es raíz del árbol BEP y tiene más de un hijo en el árbol.

c es vértice – corte puesto que no es raíz del árbol BEP y tiene un hijo h en el árbol tal que

$3 = df(c) \leq low(h) = 3$.

Ejercicio 3 (10 ptos.)

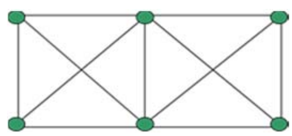
A) Se considera el grafo G definido por la lista de adyacencias

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**i**	**k**
b	a	a	e	d	a	c	f	d
c	f	g	k	k	b	f	g	e
f					g	i		
					i			

Decide si G es un grafo conexo utilizando el algoritmo BEA, con raíz en el vértice **a**.

B) En una empresa de telefonía tienen 40 antenas conectadas en una red G que tolera el fallo de 4 antenas como máximo. ¿Cuál es el número mínimo de conexiones que hay entre antenas?

C) Sea G un grafo conexo, ¿cuál es la relación existente entre la conectividad $\kappa(G)$, la conectividad de aristas $\lambda(G)$ y $\delta(G) = \text{mín}\{\,\delta(v),\ v \in V\,\}$? Halla $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ y $\delta(G)$ en el grafo de la figura.



Solución

A) **BEA:** A = [ab, ac, af, cg, fi, de, dk]

P = [a], P = [a, b, c, f], P = [b, c, f], P = [c, f], P = [c, f, g], P = [f, g], P = [f, g, i], P = [g, i], P = [i],

P = [ ], V´ $\neq \emptyset$, P = [d], P = [d, e, k], P = [e, k], P = [k], P = [ ].

Existen dos componentes conexas: L {a, b, c, f, g, i} y L {d, e, k}.

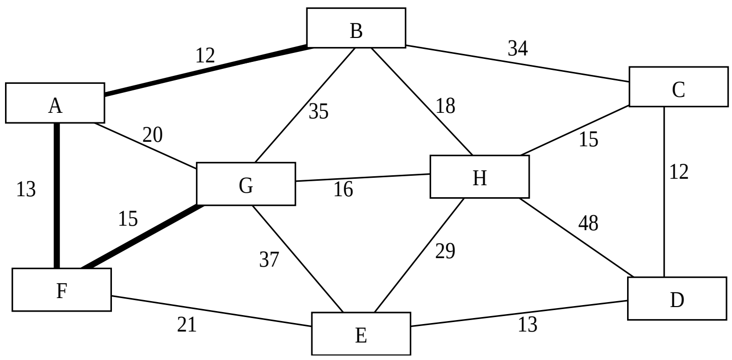
B) *G* es 5–conexo y tiene al menos $q = \left\lceil \frac{nk}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{40.5}{2} \right\rceil = 100$ aristas.

C) $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 3$, $\kappa(G) = 2$ y $\lambda(G) = 3$ El grafo es 2 – conexo y es 3 – aristoconexo.

Ejercicio 4 (5 ptos.)

El grafo de la figura representa una red de comunicaciones. La etiqueta de cada arista es el coste de la transmisión de un paquete de datos a través de dicha arista.

Las tareas semanales de revisión de la red requieren que el máximo número posible de enlaces queden inactivos temporalmente. Los enlaces que permanecerán activos deben cumplir que la nueva red siga siendo conexa. ¿Qué algoritmos seguirías para minimizar el coste total de la transmisión entre nodos de la nueva red?
Se han aplicado varias iteraciones de uno de los algoritmos válidos, ¿cuál es el algoritmo aplicado?
Completa la ejecución del algoritmo dando sus estructuras.

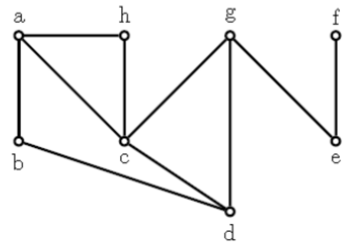


Solución: Se han aplicado tres iteraciones del algoritmo de Prim.

S:	a	b	f	g	h	c	d	e
V:	a	b	c	d	e	f	g	h
		12	∞	∞	∞	**13**	**20**	∞
			34	∞	∞	**13**	**20**	**18**
			34	∞	**21**		**15**	**18**
			34	∞	21			16
			15	48	21			
				12	21			
					13			

Ejercicio 5 (10 ptos.)

Calcula en el grafo *G* definido por la figura siguiente:



D(u, v)	a	b	c	d	e	f	g	h
a		1	1	2	3	4	2	1
b	1		2	1	3	4	2	2
c	1	2		1	2	3	1	1
d	2	1	1		2	3	1	2
e	3	3	2	2		1	1	3
f	4	4	3	3	1		2	4
g	2	2	1	1	1	2		2
h	1	2	1	2	3	4	2	

Solución

a) Excentricidades de los vértices, E(V) = [4, 4, 3, 3, 3, 4, 2, 4]

b) Radio de *G*, R(*G*) = min E(V) = 2

¿Qué vértices del grafo verifican que la distancia entre ellos es igual al radio de *G*?

{ad, ag, bc, bg, bh, ce, de, dh, fg, gh}

c) Diámetro de *G*, D(*G*) = max E(V) = 4

¿Qué vértices anteriores verifican que la distancia entre ellos es igual al diámetro de *G*?

{ae, af, bf, hf}

d Centro de *G*, *C*(*G*) = {g}

e) Distancia total de *G*, $D_T(G)$ = [14, 15, 11, 12, 15, 21, 11, 15] Mediana de *G* : 11

¿Qué vértices anteriores forman la mediana de *G*? L{c, g}